Un problème de thermoélasticité à solutions périodiques

J.M. Viano Rey

IRIA

NTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél: 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 91

UN PROBLÈME DE THERMOÉLASTICITÉ À SOLUTIONS PÉRIODIQUES

Juan Manuel VIÃNO REY

Septembre 1981

UN PROBLEME DE THERMOELASTICITE
A SOLUTIONS PERIODIQUES

Juan Manuel VIAÑO-REY (*)

Résumé

Dans cet article,on présente un problème modèle de thermoélasticité linéaire dans un milieu avec attaches élastiques, les conditions physiques permettant de négliger les forces d'inertie.

L'existence et l'unicité de déplacements et températures périodiques en temps sont montrées, en utilisant la théorie des opérateurs linéaires dans des espaces de Hilbert.

Abstract

In this study we consider a model problem in linear thermoelasticity for a medium in contact with an elastic body and taking no care of inertial force.

The existence and unicity of periodic displacements and temperature are shown by using the theory of linear operators in Hilbert spaces.

(*) Departamento Ecuaciones Fucionales. Univ. Santiago de Compostela. Espagne. Travail réalisé alors que l'auteur était stagiaire à l'INRIA-MODULEF, 78153 Le Chesnay Cédex, FRANCE.
Je remercie Monsieur G. DUVAUT pour la proposition du problème et tous ses conseils.

INTRODUCTION

Dans ce travail nous envisageons un corps élastique conducteur de chaleur qui occupe une région Ω de l'espace $\mathbb{R}^3$ avec attaches, sur un autre corps de comportement élastique, dans une partie de sa frontière.

Ce corps est soumis à des sollicitations externes mécaniques et thermiques périodiques; les forces d'inertie sont négligeables.

Dans la Section 1, ci-dessous, on pose le problème en reprenant le cadre physique de DUVAUT-LIONS [8] pour le comportement thermoélastique. Ce problème porte essentiellement sur le système couplé en déplacements $u = \{u_i\}$ et température absolue ξ :

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u,\xi) = f_i & 1 \leq i \leq 3 \\ \rho_0 c\,\dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\dfrac{\partial \xi}{\partial x_j}\right) + \nu_0\, m_{ij}\, \varepsilon_{ij}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = Q & \\ \text{dans } \Omega \times (0,T)\ , \quad T > 0 & \end{array} \right.$$

avec

$$(2) \qquad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad 1 \leq i,j \leq 3$$

et la loi de comportement thermoélastique linéaire :

$$(3) \qquad \sigma_{ij}(u,\xi) = a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(u) - m_{ij}(\xi - \nu_0) \ .$$

Les conditions aux limites envisagées correspondent à la température et déplacements fixés sur parties disjointes de la frontière, à la condition d'équilibre et à la loi de Fourier. De plus, sur la partie de la frontière en contact avec le corps élastique, la condition d'attache (cf. DUVAUT-LIONS [7] s'écrit :

(4) $$\sigma_N = - \eta u_N \quad , \quad \sigma_T = 0 \ .$$

Dans la Section 2, nous établissons l'existence et l'unicité de la solution du problème précédent qui vérifie la condition de périodicité :

(5) $$u(x,0) = u(x,T) \quad , \quad \xi(x,0) = \xi(x,T)$$

correspondant aux sollicitations.

Ensuite, et dans la Section finale, on étudie le développement de la solution en série de Fourier :

(6) $$u(.,t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{u}_m \, e^{im\omega t} \quad , \quad \xi(.,t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\xi}_m \, e^{im\omega t} \ , \ (\omega = \frac{2\Pi}{T}) \ .$$

Les coefficients de la série $\hat{u}_m$, $\hat{\xi}_m$ sont obtenus comme solution d'un problème variationnel stationnaire couplé. □

1. POSITION DU PROBLEME

1.1. Le problème aux dérivées partielles

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné "suffisamment régulier" de frontière Γ. On note $n = \{n_i\}$ la normale unitaire de Γ extérieure à Ω.

Dans Ω est considéré un matériau soumis à une force volumique $f = \{f_i\}$ et une source de chaleur interne Q.

On considère dans Γ les parties Γ_i , $0 \leq i \leq 4$ vérifiant

(1.1) $$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

(1.2) $$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \quad 0 \leq i,j \leq 2 \ , \ \Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$$

et on suppose que Γ_1 est la partie de Ω en contact avec l'autre milieu de réponse élastique.

Nous reprenons les équations de thermoélasticité linéaire, liant les déplacements $u = \{u_i\}$ et la température absolue ξ dans Ω, l'hypothèse que la force d'inertie, $\rho_0 \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$, est nulle :

$$(1.3) \quad \left| \begin{array}{lll} -\dfrac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u,\xi) = f_i \quad , & 1 \le i \le 3 \; , & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\[2ex] \rho_0 c \dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \dfrac{\partial \xi}{\partial x_j}\right) + \nu_0 \, m_{ij} \, \varepsilon_{ij}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = Q & & \text{dans } \Omega \times (0,T) \end{array} \right.$$

$$(1.4) \quad \left| \begin{array}{ll} \varepsilon_{ij}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) & 1 \le i,j \le 3 \\[2ex] \sigma_{ij}(u,\xi) = a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u) - m_{ij}(\xi - \nu_0) & 1 \le i,j \le 3 \; . \end{array} \right.$$

Les considérations physiques qui fournissent les équations précédentes sont abordées dans DUVAUT-LIONS [8] et CARLSON [4].

Les équations (1.3), (1.4) sont relatives à un matériau non homogène et non isotrope, c'est-à-dire que les teneurs a_{ijkh}, m_{ij}, k_{ij} peuvent dépendre du point x (et aussi ν_0, température moyenne uniforme positive). Par contr les scalaires ρ_0 (densité du matériau) et c (chaleur spécifique à déformation constante), sont supposées constantes et peuvent être prises égales à 1 par changement d'échelle sur le temps et la température.

Rappelons que le tenseur, k_{ij}, de conductivité thermique et le tenseur, a_{ijkh}, d'élasticité vérifient les conditions de coercivité :

$$(1.5) \qquad k_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha_1 \, \xi_i\xi_i \quad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^3 \ (\alpha_1 > 0)$$

$$(1.6) \qquad a_{ijkh}(x)\xi_{ij}\xi_{kh} \ge \alpha_2 \, \xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi_{ij} \in \mathbb{R} \ (\alpha_2 > 0)$$

et de symétrie

$$(1.7) \qquad k_{ij} = k_{ji} \qquad 1 \le i,j \le 3 \; .$$

(1.8) $$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij} \qquad 1 \le i,j \le 3 \ .$$

On a aussi pour le tenseur de dilatation thermique :

(1.9) $$m_{ij} = m_{ji} \qquad 1 \le i,j \le 3 \ .$$

Notre objectif est l'étude du système (1.3)-(1.4) avec la condition de périodicité :

(1.10) $$u(x,0) = u(x,T) \quad , \quad \xi(x,0) = \xi(x,T) \quad , \text{ dans } \Omega.$$

En ce qui concerne les conditions limites, dans le cadre mathématique utilisé dans la suite, peut être considérée la situation suivante générale :

(1.11) $$u_i = \hat{u}_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0,T) \qquad 1 \le i \le 3$$

(1.12) $$\xi = \hat{\xi} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T)$$

(1.13) $$\sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T) \qquad 1 \le i \le 3$$

(1.14) $$q_i n_i = G \quad \text{sur} \quad \Gamma_4 \times (0,T) \quad , \quad q_i = - k_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \qquad 1 \le i \le 3$$

où $\hat{u} = \{\hat{u}_i\}$, $\hat{\xi}$, $F = \{F_i\}$- efforts surfaciques - et G - flux de chaleur à travers la frontière - sont les données du problème.

Pour les conditions sur Γ_1, on utilise la notation suivante classique (cf. DUVAUT-LIONS [7]) :

(1.15) $$\left| \begin{array}{l} Z = \{Z_i\} \qquad n = \{n_i\}, \ Z_N = Z_i n_i \ , \ Z_T = Z - n\, Z_N \\ \\ \sigma_N = \sigma_{ij} n_i n_j \qquad \sigma_T = \{\sigma_{iT}\} \ \text{ avec } \ \sigma_{iT} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_N n_i \end{array} \right.$$

Alors les conditions d'attache sur Γ_1 sont :

(1.16) $$\sigma_T = 0 \ , \ \sigma_N = -\eta \, u_N \quad (\eta > 0) \quad \text{dans} \quad \Gamma_1 \times (0,T) \ .$$

Dans la suite il serait préférable de travailler avec le champ de différences de température

(1.17) $$\theta = \xi - \nu_0$$

de façon que θ puisse prendre éventuellement des valeurs négatives. En termes de θ la relation des contraintes avec les déplacements et la température devient :

(1.18) $$\sigma_{ij}(u,\theta) = a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u) - m_{ij}\theta$$

L'équation de conduction de chaleur est la même en substituant ξ par θ et

$$q_i = - k_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = - k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}$$

de sorte que (1.14) reste inchangée. De plus, la périodicité de ξ équivaut à celle de θ.

Le problème à étudier, exprimé en termes d'équations aux dérivées partielles,est donc le suivant :

trouver $u_i(x,t)$, $1 \leq i \leq 3$ et $\theta(x,t)$ définies dans $\Omega \times (0,T)$ solution de

(1.19) $$\left| \begin{array}{l} - \dfrac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u)] + \dfrac{\partial}{\partial x_j}[m_{ij}\theta] = f_i \qquad 1 \leq i \leq 3 \\ \dfrac{\rho_0 c}{\nu_0} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(\dfrac{k_{ij}}{\nu_0} \dfrac{\partial \theta}{\partial x_j}\right) + m_{ij}\, \varepsilon_{ij}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = q = \left(\dfrac{Q}{\nu_0}\right) \end{array} \right.$$

dans $Q = \Omega \times (0,T)$ avec :

(1.20) $$u(x,0) = u(x,T) \quad , \quad \theta(x,0) = \theta(x,T) \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et les conditions aux limites

$$(1.21)\quad \left|\begin{array}{ll} u = \hat{u} & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\ \theta = \hat{\theta} & \text{sur } \Sigma_3 = \Gamma_3 \times (0,T) \\ \sigma_{ij} n_j = F_i \quad 1 \leq i \leq 3 & \text{sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0,T) \\ - k_{ij} \dfrac{\partial\theta}{\partial x_j} n_i = G & \text{sur } \Sigma_4 = \Gamma_4 \times (0,T) \\ \sigma_T = 0 \ , \ \sigma_N + \eta u_N = 0 & \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \end{array}\right.$$

(Γ_i vérifiant (1.1)-(1.2)) et $\sigma_{ij}(u,\theta)$ donné par (1.18). □

<u>Remarque 1.1</u>. Eventuellement, les situations suivantes sont envisagées :

$$(1.22)\quad \left|\begin{array}{lll} \Gamma_0 = \emptyset & \text{alors } \Gamma_2 \cup \Gamma_1 = \Gamma & , \ \Gamma_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset \\ \Gamma_1 = \emptyset & \text{alors } \Gamma_0 \cup \Gamma_2 = \Gamma & , \ \Gamma_0 \cap \Gamma_2 = \emptyset \\ \Gamma_2 = \emptyset & \text{alors } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma & , \ \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset \end{array}\right.$$

et/ou

$$(1.23)\quad \left|\begin{array}{ll} \Gamma_3 = \emptyset & , \quad \Gamma_4 = \Gamma \\ \Gamma_4 = \emptyset & , \quad \Gamma_3 = \Gamma . \end{array}\right.$$

Pour rendre plus facile l'exposé, on a choisi le cas suivant particulier

$$(1.24)\quad \Gamma_3 = \Gamma_1 \ , \ \Gamma_4 = \Gamma_2 \cup \Gamma_0 \ , \ \text{flux dans } \Gamma_0 \text{ nul.}$$

Les modifications de type théorique à faire pour un cas différent restent transparentes.

Tenant compte de (1.24) on considérera donc

$$(1.25) \qquad \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad , \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \qquad 0 \leq i,j \leq 2 \qquad i \neq j$$

et les conditions aux limites (tirées de (1.21))

$$(1.26) \qquad \left| \begin{array}{l} u = \hat{u} \quad , \quad - k_{ij} \dfrac{\partial\theta}{\partial x_j} n_i = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0 \\[2ex] \theta = \hat{\theta} \quad , \quad \sigma_T = 0 \quad , \quad \sigma_N + \eta u_N = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma_1 \\[2ex] \sigma_{ij} n_j = F_i \quad (1 \leq i \leq 3) \quad , \quad - k_{ij} \dfrac{\partial\theta}{\partial x_j} n_i = G \quad \text{sur} \quad \Sigma_2 \ . \end{array} \right.$$

Pour étudier le problème défini par (1.19), (1.20), (1.26), nous allons définir un cadre fonctionnel approprié. □

1.2. Formulation variationnelle faible

On utilisera la notation suivante

$$u(t) : x \in \Omega \to u(x,t)$$

$$u'(t) : x \in \Omega \to \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \ .$$

On suppose que les données du problème vérifient, pour $0 \leq t \leq T$:

$$(1.27) \qquad \left| \begin{array}{l} \hat{u}(t) \ \text{ est restriction à } \ \Gamma_0 \ \text{ de } \ U(t) \in [H^{1/2}(\Gamma)]^3 \\[1.5ex] \hat{\theta}(t) \ \text{ est restriction à } \ \Gamma_1 \ \text{ de } \ \Theta(t) \in H^{1/2}(\Gamma) \\[1.5ex] f_i(t) \in L^2(\Omega) \ , \ F_i(t) \in L^2(\Gamma_2) \quad , \quad 1 \leq i \leq 3 \\[1.5ex] q(t) \in L^2(\Omega) \quad , \ g(t) \in L^2(\Gamma_2) \ \text{ avec } \ g = G/\nu_0 \end{array} \right.$$

$$(1.28) \qquad \left| \begin{array}{l} \rho_0 > 0 \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \nu_0 > 0 \\[1.5ex] a_{ijkh} \in L^\infty(\Omega) \ \text{ vérifiant (1.6)-(1.8)} \\[1.5ex] k_{ij} \in L^\infty(\Omega) \ \text{ vérifiant (1.5)-(1.7)} \\[1.5ex] m_{ij} \in L\ (\Omega) \ \text{ et (1.9).} \end{array} \right.$$

On introduit les espaces de fonctions suivants :

(1.29) $\quad V_1 = \{v/v \in [H^1(\Omega)]^3 : v_i|_{\Gamma_0} = 0 \quad , \quad 1 \le i \le 3\}$

muni de la norme Hilbertienne produit : $||v||_1 = [\sum_{i=1}^{3} ||v_i||^2_{1,\Omega}]^{1/2}$

(1.30) $\quad H_1 = [L^2(\Omega)]^3 \quad$, avec $|v|_1 = [\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |v_i|^2]^{1/2}$

(1.31) $\quad V_2 = \{\phi | \phi \in H^1(\Omega) : \phi|_{\Gamma_1} = 0\}$, avec $||\phi||_2 = ||\phi||_{1,\Omega}$

(1.32) $\quad H_2 = L^2(\Omega)$ avec le produit scalaire $(\phi,\psi)_2 = \int_\Omega \frac{\rho_0 c}{\nu_0} \phi \, \psi \, dx$

Les injections continues et denses $V_i \subset H_i \subset V_i$ $(1 \le i \le 2)$ seront utilisées.

Soit

(1.33)
$$\left| \begin{array}{l} a(u,v) = \int_\Omega a_{ijkh} \, \varepsilon_{kh}(u) \, \varepsilon_{ij}(v) dx + \eta \int_{\Gamma_1} u_N \, v_N \, d\Gamma \, , \\ u,v \in [H^1(\Omega)]^3 \end{array} \right.$$

$a(.,.)$ est une forme bilineaire continue sur $[H^1(\Omega)]^3 \times [H^1(\Omega)]^3$ telle que (cf. DUVAUT-LIONS [7], VIAÑO [15]) :

(1.34)
$$\left| \begin{array}{l} a(u,u) \ge \alpha_1 \, ||u||_1^2 \quad , \quad \forall \, u \in V_1 \quad (\alpha_1 > 0) \\ \text{sauf le cas } \operatorname{mes}(\Gamma_0) = 0 \text{ et } \Gamma_1 \text{ contenu dans un plan.} \end{array} \right.$$

On définit sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ la forme bilinéaire continue et symétrique

(1.35)
$$k(\phi,\psi) = \int_\Omega \frac{k_{ij}}{\nu_0} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx \quad , \quad \phi,\psi \in H^1(\Omega) \; .$$

Alors, pour tout $c > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$(1.36) \qquad k(\phi,\phi) + c\ |\phi|_2^2 \geq \lambda\ ||\phi||_{1,\Omega}^2 \quad , \quad \forall\ \phi \in H^1(\Omega)$$

et

$$(1.37) \qquad \left| \begin{array}{l} \text{si} \quad \mathrm{mes}(\Gamma_1) \neq 0 \qquad (V_2 \subsetneq H^1(\Omega)) : \\ \\ k(\phi,\phi) \geq \alpha_2\ ||\phi||_2^2 \quad , \quad \forall\ \phi \in V_2 \quad (\alpha_2 > 0)\ . \end{array} \right.$$

Une troisième forme bilinéaire continue est définie sur $H_2 \times [H^1(\Omega)]^3$ par :

$$(1.38) \qquad \left| \begin{array}{l} m(\phi,v) = \int_\Omega \phi\, m_{ij}\ \varepsilon_{ij}(v)dx = \int_\Omega m_{ij}\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\ \phi\ dx \quad , \\ \\ \phi \in H_2 \ ,\ v \in [H^1(\Omega)]^3\ . \end{array} \right.$$

Avec les notations introduites, toute solution suffisamment régulière du problème posé ci-après est solution de (1.19)-(1.20)-(1.26) :

$$(1.39) \qquad \left| \begin{array}{l} u : t \in [0,T] \to u(t) \in [H^1(\Omega)]^3 \ ,\ u(t) = \hat{u}(t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \quad 0 \leq t \leq T\ , \\ \\ \theta : t \in [0,T] \to \theta(t) \in H^1(\Omega) \quad , \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad 0 \leq t \leq T \\ \\ \text{vérifiant dans} \quad]0,T[\\ \\ a(u(t),v) - m(\theta(t),v) = \int_\Omega f(t).v\ dx + \int_{\Gamma_2} F(t).v\ d\Gamma \quad , \forall\ v \in V \\ \\ (\theta'(t),\phi)_2 + k(\theta(t),\phi) + m(\phi,u'(t)) = \int_\Omega q(t)\,\phi\,dx - \int_{\Gamma_2} g(t)\phi\ d\Gamma, \\ \\ \qquad\qquad \forall\ \phi \in V_2 \\ \\ u(0) = u(T) \quad , \quad \theta(0) = \theta(T). \end{array} \right.$$

□

2. EXISTENCE ET UNICITE DE SOLUTION

Dans la suite, nous allons résoudre le problème (1.39) au sens des distributions sur $(0,T)$. Ci-après, nous envisageons le théorème général et faisons la démonstration en plusieurs étapes.

Théorème 2.1. En supposant $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, et

(2.1) $\quad f_i \, , \, f_i' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \, , \, f_i(0) = f_i(T) \quad , \quad 1 \le i \le 3$

(2.2) $\quad F_i \, , \, F_i' \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \, , \, F_i(0) = F_i(T) \quad , \quad 1 \le i \le 3$

(2.3) $\quad g \, , \, g' \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \, , \, g(0) = g(T)$

(2.4) $\quad q \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

(2.5) $$\left| \begin{array}{l} \hat{u}_i \text{ restriction à } \Gamma_0 \times (0,T) \text{ de } U_i \text{ avec} \\ U_i \, , \, U_i' \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \, , \, U_i(0) = U_i(T) \quad , \quad 1 \le i \le 3 \end{array} \right.$$

(2.6) $$\left| \begin{array}{l} \hat{\theta} \text{ restriction à } \Gamma_1 \times (0,T) \text{ de } \Theta \text{ avec} \\ \Theta \, , \, \Theta' \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \, , \, \Theta(0) = \Theta(T) \end{array} \right.$$

alors il existe un et un seul couple (u,θ) solution de (1.39) vérifiant

(2.7) $\quad u \in L^\infty(0,T;[H^1(\Omega)]^3), \; u' \in L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)$

(2.8) $\quad \theta \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \, , \, \theta' \in L^2(0,T;H_2) \, .$ □

La présente section est consacrée à la démonstration du Théorème 2.1.

2.1. Transformation du problème

Pour réduire le problème au cas des espaces vectoriels, on effectue une transformation (changement de variable par translation) qui réduit le problème à une forme plus classique.

Soit $p(t)$ vérifiant

(2.9) $$p, p' \in L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^3),\ p(0) = p(T) .$$

Pour chaque $t \in [0,T]$, et U vérifiant (2.5), considérons le problème

(2.10) $$\left| \begin{array}{ll} \text{Trouver } \Phi(t) \in \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v = U(t) \text{ sur } \Gamma\} \text{ vérifiant} & \\ a(\Phi(t),v) = \langle p(t),v\rangle & \forall\, v \in [H_0^1(\Omega)]^3 . \end{array} \right.$$

L'existence et l'unicité de solution pour (2.10) entraine l'existence de ϕ vérifiant

(2.11) $$\Phi,\ \Phi' \in L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)\ ;\ \phi = \hat{u} \text{ sur } \Gamma_0 \times (0,T) \text{ et } \phi(0) = \phi($$

Par analogie, soit $\nu(t)$ vérifiant

(2.12) $$\nu, \nu' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) ,\ \nu(0) = \nu(T) .$$

Pour chaque $t \in [0,T]$, et pour Θ , g donnés par (2.6), (2.3), considérons le problème

(2.13) $$\left| \begin{array}{ll} \text{Trouver } \Lambda(t) \in \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = \Theta(t) \text{ sur } \Gamma\} \text{ vérifiant} & \\ k(\Lambda(t),\phi) = (\nu(t),\phi)_2 - \int_{\Gamma_2} g(t)\phi\, d\Gamma & \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

L'existence et l'unicité de solution pour (2.13) donne Λ vérifiant :

$$(2.14)\quad \left|\begin{array}{l} \Lambda,\Lambda' \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \ , \ \Lambda = \hat{\theta} \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \times (0,T) \ \text{ et } \ \Lambda(0) = \Lambda(T) \\ k(\Lambda(t),\phi) = (\nu(t),\phi)_2 - \int_{\Gamma_2} g(t)\phi \, d\Gamma \ , \ \text{avec} \ \ \nu \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \ . \end{array}\right.$$

Remarque 2.1. Dans les affirmations précédentes, interviennent la coercivité des formes a et k sur $[H_0^1(\Omega)]^3$ et $H_0^1(\Omega)$, respectivement, (conséquence de (1.5)-(1.6)) et le lemme de Lax-Milgram. □

On pose alors

$$(2.15)\qquad \tilde{u} = u - \Phi \quad , \quad \tilde{\theta} = \theta - \Lambda$$

de sorte que (u,θ) est solution de (1.39) si et seulement si $(\tilde{u},\tilde{\theta})$ est solution du problème suivant :

$$(2.16)\quad \left|\begin{array}{l} \tilde{u} : t \in [0,T] \to \tilde{u}(t) \in V_1 \ , \ \tilde{\theta} : t \in [0,T] \to \tilde{\theta}(t) \in V_2 \\ \text{vérifiant dans } \ ]0,T[\\ a(\tilde{u}(t),v) - m(\tilde{\theta}(t),v) = \langle L_1(t),v\rangle \quad , \ \forall\, v \in V_1 \\ (\tilde{\theta}'(t),\phi)_2 + k(\tilde{\theta}(t),\phi) + m(\phi,\tilde{u}'(t)) = \langle L_2(t),\phi\rangle \quad , \ \forall\, \phi \in V_2 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(T) \quad , \quad \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(T) \end{array}\right.$$

où les formes linéaires continues $L_i(t)$ sur V_i $(i=1,2)$ sont données par :

$$(2.17)\quad \left|\begin{array}{l} \langle L_1(t),v\rangle = \int_\Omega f(t).v\, dx + \int_{\Gamma_2} F(t).v\, d\Gamma - a(\Phi(t),v) + m(\Lambda(t),v) \\ \qquad \forall\, v \in V_1 \end{array}\right.$$

$$(2.18)\quad \left|\begin{array}{l} \langle L_2(t),v\rangle = \int_\Omega q(t)\phi\, dx - \int_{\Gamma_2} g(t)\phi\, d\Gamma - (\Lambda'(t),\phi)_2 - \\ \qquad\qquad - k(\Lambda(t),\phi) - m(\phi,\Phi'(t)) \quad , \ \forall\, \phi \in V_2 \ . \ \square \end{array}\right.$$

Il faut noter que, d'après (2.1)-(2.4) et le choix de ϕ,Λ dans (2.11)-(2.14), on a :

(2.19) $$L_1,\ L_1' \in L^2(0,T;V_1')\ ,\ L_1(0) = L_1(T)$$

(2.20) $$L_2 \in L^2(0,T;H_2)\ .$$

Dans la suite, nous allons montrer que dans les hypothèses (2.19)-(2.20), le problème (2.16) admet une et une seule solution. □

2.2. Autre aspect du problème

Dans ce paragraphe, on considérera $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ les espaces de Sobolev comme des fonctions à valeurs complexes. A partir des données du Théorème 2.1, on définit $\tilde{H}_i$, $\tilde{V}_i$ $(i=1,2)$, les espaces complexes correspondant à H_i et V_i. Si X' désigne l'antidual de l'espace de Banach complexe X on a $\tilde{V}_i \subset \tilde{H}_i \subset \tilde{V}_i'$ avec injections continues et denses. On considère le problème (2.16) dans le cas complexe.

Pour cela, on introduit les formes sesquilinéaires hermitiennes et continu

(2.21) $$\tilde{a}(u,v) = \int_\Omega a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u)\, \overline{\varepsilon_{ij}(v)}dx + \eta \int_{\Gamma_1} u_N\, \overline{v_N}\, d\Gamma \quad ,\ u,v \in [H^1(\Omega$$

(2.22) $$\tilde{k}(\phi,\psi) = \int_\Omega \frac{k_{ij}}{\nu_0} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}\, dx \quad ,\ \phi,\psi \in H^1(\Omega)$$

(2.23) $$\tilde{m}(\phi,v) = \int_\Omega m_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, \phi\, dx \quad ,\ \phi \in \tilde{H}_2\ ,\ v \in [H^1(\Omega)]^3\ .$$

Sauf les cas déjà cités dans (1.34) et (1.37), $\tilde{a}$ est $\tilde{V}_1$-elliptique et $\tilde{k}$, $\tilde{V}_2$-elliptique.

Soient $\xi_1(t) \in \tilde{V}_1'$, $\xi_2(t) \in \tilde{V}_2'$, $t \in [0,T]$, formes antilinéaires continues sur $\tilde{V}_1$ et $\tilde{V}_2$ respectivement.

On pose alors le problème suivant :

(2.24) $\qquad \tilde{u} \in L^{\infty}(0,T;\tilde{V}_1) \ , \ \tilde{u}' \in L^2(0,T;\tilde{V}_1)$

(2.25) $\qquad \tilde{\theta} \in L^2(0,T;\tilde{V}_2) \ , \ \tilde{\theta}' \in L^2(0,T;\tilde{H}_2)$

solution de

$$(2.26) \qquad \left| \begin{array}{l} \tilde{a}(\tilde{u}(t),v) - \tilde{m}(\tilde{\theta}(t),v) = \langle \xi_1(t),v \rangle \quad , \forall\, v \in \tilde{V}_1 \\ (\tilde{\theta}'(t),\phi)_2 + \tilde{k}(\tilde{\theta}(t),\phi) + \overline{\tilde{m}(\phi,\tilde{u}'(t))} = \langle \xi_2(t),\phi \rangle \quad , \forall\, \phi \in \tilde{V}_2 \\ \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(T) \ , \ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(T) \ . \end{array} \right. \qquad \square$$

Pour $v \in \tilde{V}_1$, $\phi \in \tilde{V}_2$, on pose

(2.27) $\qquad v = v_1 + i\, v_2 \ , \ \phi = \phi_1 + i\, \phi_2 \qquad \phi_j \in V_2 \ , \ v_j \in V_1 \quad (j=1,2)$.

Considérons le cas particulier suivant :

(2.28) $\qquad \langle \xi_1(t),v \rangle = \langle L_1(t),v_1 \rangle - i \langle L_1(t),v_2 \rangle$

(2.29) $\qquad \langle \xi_2(t),\phi \rangle = \langle L_2(t),\phi_1 \rangle - i \langle L_2(t),\phi_2 \rangle$.

Alors le problème (2.26) équivaut à

$$(2.30) \qquad \left| \begin{array}{l} \tilde{a}(\tilde{u}(t),v_1) - i\, \tilde{a}(\tilde{u}(t),v_2) - \tilde{m}(\tilde{\theta}(t),v_1) + i\, \tilde{m}(\tilde{\theta}(t),v_2) = \\ \qquad = \langle L_1(t),v_1 \rangle - i \langle L_1(t),v_2 \rangle \qquad \forall\, v_1,v_2 \in V_1 \end{array} \right.$$

$$(2.31) \qquad \left| \begin{array}{l} (\tilde{\theta}'(t),\phi_1)_2 - i(\tilde{\theta}'(t),\phi_2)_2 + \tilde{k}(\tilde{\theta}(t),\phi_1) - i\, \tilde{k}(\tilde{\theta}(t),\phi_2) + \\ + \overline{\tilde{m}(\phi_1,\tilde{u}'(t))} - i\, \overline{\tilde{m}(\phi_2,\tilde{u}'(t))} = \langle L_2(t),\phi_1 \rangle - i \langle L_2(t),\phi_2 \rangle \\ \qquad \forall\, \phi_1,\phi_2 \in V_2 \end{array} \right.$$

La vérification de (2.30)-(2.31) équivaut à (*)

(*) Faire $v_2 = 0$, $\phi_2 = 0$

$$(2.32)\qquad \left|\begin{array}{ll} \tilde{a}(\tilde{u}(t),v) - \tilde{m}(\tilde{\theta}(t),v) = \langle L_1(t),v\rangle & ,\ \forall\, v \in V_1 \\ (\tilde{\theta}'(t),\phi)_2 + \tilde{k}(\tilde{\theta}(t),\phi) + \overline{\tilde{m}(\phi,\tilde{u}'(t))} = \langle L_2(t),\phi\rangle & ,\ \forall\, \phi \in V_2\ . \end{array}\right.$$

Si on fait

$$(2.33)\qquad \tilde{u}(t) = \tilde{u}_1(t) + i\,\tilde{u}_2(t)\quad ,\quad \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}_1(t) + i\,\tilde{\theta}_2(t)\ ,$$

par égalisation des parties réelles et imaginaires, on voit que $\tilde{u}_i$, $\tilde{\theta}_i$ $(i = 1,2)$ vérifient

$$(2.34)\qquad \left|\begin{array}{ll} \tilde{u}_i \in L^\infty(0,T;V_1) & \tilde{u}_i' \in L^2(0,T;V_1) \\ \tilde{\theta}_i \in L^2(0,T;V_2) & \tilde{\theta}_i' \in L^2(0,T;H_2) \end{array}\right.$$

et

$$(2.35)\qquad \left|\begin{array}{ll} a(\tilde{u}_1(t),v) - m(\tilde{\theta}_1(t),v) = \langle L_1(t),v\rangle & \forall\, v \in V_1 \\ (\tilde{\theta}_1(t),\phi)_2 + k(\tilde{\theta}_1(t),\phi) + m(\phi,\tilde{u}_1'(t)) = \langle L_2(t),\phi\rangle & \forall\, \phi \in V_2 \\ \tilde{\theta}_1(0) = \tilde{\theta}_1(T)\quad ,\quad \tilde{u}_1(0) = \tilde{u}_1(T) & \end{array}\right.$$

$$(2.36)\qquad \left|\begin{array}{ll} a(\tilde{u}_2(t),v) - m(\tilde{\theta}_2(t),v) = 0 & \forall\, v \in V_1 \\ (\tilde{\theta}_2'(t),\phi)_2 + k(\tilde{\theta}_2(t),\phi) + m(\phi,\tilde{u}_2'(t)) = 0 & \forall\, \phi \in V_2 \\ \tilde{\theta}_2(0) = \tilde{\theta}_2(T)\quad ,\quad \tilde{u}_2(0) = \tilde{u}_2(T). & \end{array}\right.$$

Réciproquement, il est clair que si $(\tilde{u}_1,\tilde{\theta}_1)$, $(\tilde{u}_2,\tilde{\theta}_2)$ sont solutions de (2.34)-(2.35)-(2.36), alors, $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + i\,\tilde{u}_2$, $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_1 + i\,\tilde{\theta}_2$ sont solutions de (2.24)-(2.26).

Bref, si nous montrons que le problème (2.24)-(2.26) avec (2.28)-(2.29) a une solution unique, alors elle est la seule solution (réelle) de (1.39) vérifiant (2.24)-(2.25). $\square$

Nous commencons par écrire (2.26) sous une forme équivalente.

Soit $\widetilde{A} \in L(\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_1')$ l'opérateur linéaire défini par :

(2.37) $$<\widetilde{A}u,v> = \widetilde{a}(u,v) \quad , \quad u,v \in \widetilde{V}_1 \ .$$

En supposant $\widetilde{a}$ $\widetilde{V}_1$-elliptique (le cas défavorable sera traité à la fin de la Section), l'opérateur $\widetilde{A}$ est un isomorphisme, $\widetilde{A},\widetilde{A}^{-1}$ étant continus.

De même, soit $\widetilde{K} \in L(\widetilde{V}_2,\widetilde{V}_2')$ défini par

(2.38) $$<\widetilde{K}\phi,\phi> = \widetilde{k}(\phi,\psi) \quad , \quad \phi,\psi \in \widetilde{V}_2 \ .$$

Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, $\widetilde{k}$ est $\widetilde{V}_2$-elliptique et donc $\widetilde{K}$ est inversible avec $\widetilde{K}^{-1}$ continu.

Finallement, soient $\widetilde{M} \in L(\widetilde{H}_2,\widetilde{V}_1')$, $\widetilde{M}^* \in L(\widetilde{V}_1,\widetilde{H}_2)$ définis par les relations

(2.39) $$<\widetilde{M}\phi,v> = \widetilde{m}(\phi,v) = (\phi,\widetilde{M}^*v)_2 \quad , \quad \phi \in \widetilde{H}_2, \ v \in \widetilde{V}_1$$

Avec ces notations, (2.26) devient :

(2.40) $$\left| \begin{array}{l} \widetilde{A}\ \widetilde{u}(t) - \widetilde{M}\ \widetilde{\theta}(t) = \xi_1(t) \\ \\ \widetilde{\theta}'(t) + \widetilde{K}\ \widetilde{\theta}(t) + \widetilde{M}^*\ \widetilde{u}'(t) = \xi_2(t) \qquad \text{dans} \quad]0,T[\\ \\ \widetilde{\theta}(0) = \widetilde{\theta}(T) \quad , \quad \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(T) \quad . \end{array} \right.$$

Pour le cas particulier de ξ_1,ξ_2 donnés par (2.28)-(2.29), nous avons bien , d'après (2.19)-(2.20)

(2.41) $$\xi_1,\xi_1' \in L^2(0,T;\widetilde{V}_1') \quad , \quad \xi_1(0) = \xi_1(T)$$

(2.42) $\qquad \xi_2 \in L^2(0,T;\tilde{H}_2)$.

Donc, le but est de montrer maintenant que, si (2.41)-(2.42) sont vérifiés alors (2.40) admet une et une seule solution vérifiant (2.24)-(2.25). □

Puisque $\tilde{A}^{-1}$ existe et est continu, toute solution $(\tilde{u},\tilde{\theta})$ de (2.40) est de la forme

(2.43) $\qquad \tilde{u}(t) = \tilde{A}^{-1}[\xi_1(t) + \tilde{M}\,\tilde{\theta}(t)] \quad$ dans $[0,T]$

et $\tilde{\theta}$, vérifiant (2.25), solution de l'équation dans $\tilde{V}_2'$

(2.44)
$$\left|\begin{array}{l}(I + \tilde{M}^*\tilde{A}^{-1}\,\tilde{M})\,\tilde{\theta}'(t) + \tilde{K}\,\tilde{\theta}(t) = \xi_2(t) - \tilde{M}^*\,\tilde{A}^{-1}\,\xi_1'(t) \quad \text{dans} \quad]0,T[\\[2ex] \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(T)\ .\end{array}\right.$$

Le résultat énoncé dans le Théorème 2.1 est conséquence de la proposition suivante :

<u>Proposition 2.1</u>. Si ξ_1,ξ_2 vérifient (2.41)-(2.42), le problème (2.44) admet une et une seule solution vérifiant (2.25). □

La démonstration de la proposition précédente sera faite par transformation de (2.44) dans un problème classique.

<u>Proposition 2.2</u>. L'application

(2.45) $\qquad (\phi,\psi) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to (\phi,\psi)_m = ((I + \tilde{M}^*\,\tilde{A}^{-1}\,\tilde{M})\phi,\psi)_2 \in \mathbb{C}^1$

définit un produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ équivalente à $(,)_2$ □

<u>Démonstration</u>. L'application (2.45) est hermitienne :

$$(\phi,\psi)_m = (\phi,\psi)_2 + (\tilde{M}^* \tilde{A}^{-1} \tilde{M}\phi,\psi)_2 = \overline{(\psi,\phi)}_2 + \overline{(\psi,\tilde{M}^* \tilde{A}^{-1} \tilde{M}\phi)_2} =$$

$$= \overline{(\psi,\phi)_2} + \overline{\langle \tilde{M}\psi,\tilde{A}^{-1} \tilde{M}\phi\rangle} = \overline{(\psi,\phi)_2} + \langle \tilde{A}^{-1} \tilde{M}\,\psi,\tilde{M}\phi\rangle =$$

$$= \overline{(\psi,\phi)_2} + \overline{(\tilde{M}^* \tilde{A}^{-1} \tilde{M}\,\psi,\phi)_2} = \overline{(\psi,\phi)_m}\ .$$

De plus, on a

(2.46) $\quad (\tilde{M}^* \tilde{A}^{-1} \tilde{M}\,\phi,\phi)_2$ réel, non négatif, pour tout $\phi \in L^2(\Omega)$.

En effet :

$$(\tilde{M}^* \tilde{A}^{-1} \tilde{M}\,\phi,\phi)_2 = \langle \tilde{A}^{-1} \tilde{M}\,\phi,\tilde{M}\phi\rangle = \langle \tilde{A}u(\phi),u(\phi)\rangle =$$

$$= \tilde{a}(u(\phi),u(\phi)) \geq \alpha_1\ ||u(\phi)||_1^2 \geq 0\ ,$$

où $u(\phi)$ est la seule solution de

$$\tilde{a}(u(\phi),v) = \langle \tilde{M}\,\phi,v\rangle \qquad , \forall\, v \in \tilde{V}_1\ .$$

Par conséquent, si on suppose $(\phi,\phi)_m = 0$, alors

$$0 = (\phi,\phi)_2 + (\tilde{M}\ \tilde{A}^{-1} \tilde{M}\,\phi,\phi)_2 \geq (\phi,\phi)_2$$

et $\quad \phi = 0$.

Soit $|.|_m$ la norme induite par $(.,.)_m$ dans $L^2(\Omega)$:

$$|\phi|_m = (\phi,\phi)_m^{1/2}$$

Alors $|.|_m$ et $|.|_2$ sont équivalentes :

$$|\phi|_m^2 = (\phi,\phi)_2 + (\tilde{M}^* \tilde{A}^{-1} \tilde{M}\,\phi,\phi)_2 \geq |\phi|_2^2 \qquad , \forall\, \phi \in L^2(\Omega)$$

et réciproquement

$$|\phi|_m^2 = |\phi|_2^2 + (\widetilde{M}^* \widetilde{A}^{-1} \widetilde{M}\, \phi,\phi)_2 \leq |\phi|_2^2 + |\widetilde{M}^* \widetilde{A}^{-1} M\, \phi|_2\, |\phi|_2 \leq$$

$$\leq (1+\beta)\, |\phi|_2^2 \,. \qquad \square$$

<u>Remarque 2.2</u>. Une technique du type de la proposition précédente est utilisée par AURIAULT-SANCHEZ PALENCIA [2] dans un contexte différent.

On notera par $\widetilde{H}_m$ l'espace $L^2(\Omega)$ muni de la norme $|\cdot|_m$, de sorte que $\widetilde{V}_2 \subset \widetilde{H}_m \subset \widetilde{V}_2'$ avec injections continues et denses. On rappelle que l'identification $\widetilde{H}_m \to \widetilde{V}_2'$ est faite par

$$h \in \widetilde{H}_m \to \widetilde{h} \in \widetilde{V}_2' : \langle \widetilde{h},\phi\rangle = (h,\phi)_m \qquad , \forall\, \phi \in \widetilde{V}_2 \,.$$

Si on note

$$(2.47) \qquad \xi = \xi_2 - \widetilde{M}^* \widetilde{A}^{-1} \xi_1'$$

d'après (2.41)-(2.42) on a

$$(2.48) \qquad \xi \in L^2(0,T;\widetilde{H}_2) \,.$$

De plus, le problème (2.44) équivaut à :

$$(2.49) \qquad \left| \begin{array}{ll} (\widetilde{\theta}'(t),\phi)_m + \langle \widetilde{K}\, \widetilde{\theta}(t),\phi\rangle = \langle \xi(t),\phi\rangle = (\xi(t),\phi)_2 & , \forall\, \phi \in \widetilde{V}_2 \\ \widetilde{\theta}(0) = \widetilde{\theta}(T) \,. & \end{array} \right.$$

Soit

$$(2.50) \qquad \zeta = (I + \widetilde{M}^* \widetilde{A}^{-1} \widetilde{M})^{-1} \xi.$$

Alors,

$$(2.51) \qquad \zeta \in L^2(0,T;\widetilde{H}_m) \quad , \quad (\xi(t),\phi)_2 = (\zeta(t),\phi)_m \qquad , \forall\, \phi \in L^2(\Omega)$$

et (2.49) devient

$$(2.52)\qquad \left|\begin{array}{l} (\tilde{\theta}'(t),\phi)_m + \langle \tilde{K}\,\tilde{\theta}(t),\phi\rangle = (\zeta(t),\phi)_m \qquad , \forall\ \phi \in \tilde{V}_2 \\ \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(T)\ . \end{array}\right.$$

Soit

$$(2.53)\qquad D(\tilde{B}) = \{\phi \in \tilde{V}_2 : \tilde{K}\ \phi \in \tilde{H}_m\}$$

et $\tilde{B}$ l'opérateur de $\tilde{H}_m$ dans lui-même de domaine $D(\tilde{B})$ et

$$(2.54)\qquad \tilde{B}\phi = \tilde{K}\phi \qquad , \forall\ \phi \in D(\tilde{B})\ .$$

On pose l'équation

$$(2.55)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{d\tilde{\theta}}{dt} + \tilde{B}\tilde{\theta}(t) = \zeta(t) \quad \text{dans} \quad]0,T[\\ \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(T) \end{array}\right.$$

et si $\zeta \in L^1(0,T;\tilde{H}_m)$ une solution forte de (2.55) (au sens de BREZIS [3]) est toute fonction $\tilde{\theta} \in C([0,T];\tilde{H}_m)$, absolument continue sur tout compact de $]0,T[$ - donc dérivable p.p. sur $]0,T[$ - tel que $\tilde{\theta}(t) \in D(\tilde{B})$ p.p. sur $]0,T[$ et vérifiant (2.55).

Toute solution de (2.55) est, évidement, solution de (2.52) et réciproquement;de la densité de $\tilde{V}_2$ dans $\tilde{H}_m$ on déduit que si $\tilde{\theta}$ est solution de (2.52) vérifiant (2.25) alors

$$K\tilde{\theta} = \zeta - \tilde{\theta}' \in \tilde{H}_m$$

de sorte que $\tilde{\theta}(t) \in D(\tilde{B})$, donc, $\tilde{\theta}$ est solution de (2.55).

Il faut donc montrer que si ζ vérifie (2.51), alors le problème (2.55) admet une et une seule solution vérifiant (2.25). □

La forme $\tilde{k}$ étant $\tilde{V}_2$-elliptique, $\tilde{B}$ défini par (2.53)-(2.54) est positi
$D(\tilde{B})$ est dense dans $\tilde{H}_m$ et $\tilde{B}$ génère un semi-groupe fortement continu à contractions dans $\tilde{H}_m$ (cf. YOSIDA [16]) .

La dernière asertion équivaut à dire que $\tilde{B}$ est maximal positif et l' adjoint $\tilde{B}^*$ (2) positif. Mais $\tilde{B}^*$ prolonge $\tilde{B}$. En effet : si $\phi \in D(\tilde{B})$, quelque soit $\psi \in D(\tilde{B})$ on a :

$$(\phi,\tilde{B}\psi)_m = \overline{(\tilde{B}\psi,\phi)}_m = \overline{<\tilde{K}\psi,\phi>} = \overline{\tilde{k}(\psi,\phi)} = \tilde{k}(\phi,\psi) = <\tilde{K}\phi,\psi> =$$

$$= (\tilde{B}\phi,\psi)_m$$

qui montre que $D(\tilde{B}) \subset D(\tilde{B}^*)$ et $\tilde{B}^*\phi = \tilde{B}\phi \quad , \quad \forall\ \phi \in D(\tilde{B})$.

Puisque $\tilde{B}$ est maximal positif, on peut conclure que

(2.56) $\qquad \tilde{B}$ est autoadjoint $(\tilde{B} = \tilde{B}^*)$

ce qui équivaut à

(2.57) $\qquad - i\,\tilde{B}$ est antiadjoint $((-i\,\tilde{B})^* = i\,\tilde{B})$.

Le théorème de STONE (cf. YOSIDA, op. cit.) assure que $-i\,\tilde{B}$ génère un groupe d'isométries dans $\tilde{H}_m$. Donc, $-i\,\tilde{B}$ et $i\,\tilde{B}$ sont générateurs de semigroupes de contractions dans $\tilde{H}_m$. D'après le théorème de HILLE-YOSIDA (cf. YOSIDA, op. cit.), on a :

(2.58) $\quad \left| \begin{array}{l} \forall\ t > 0\ ,\ (-\,i\,\tilde{B} + t\,I)\ ,\ (i\,\tilde{B} + t\,I) \text{ sont inversibles et} \\ \|(i\,\tilde{B} + t\,I)^{-1}\| \le \frac{1}{t},\ \|(-\,i\,\tilde{B} + t\,I)^{-1}\| \le \frac{1}{t}\ . \end{array} \right.$

---

(1) $\mathrm{Re}(\tilde{B}\phi,\phi)_m \ge 0 \quad , \quad \forall\ \phi \in D(\tilde{B})$.

(2) $D(\tilde{B}^*) = \{\phi \in \tilde{H}_m : (\phi,\tilde{B}\psi)_m = (\phi^*,\psi)_m \quad \forall\ \psi \in D(\tilde{B})\}\ ,\ \tilde{B}^*\phi = \phi^* \quad ,\ \forall\ \phi \in D(\tilde{B}$

De plus, puisque $\widetilde{K}$ est une isomorphisme de $\widetilde{V}_2$ dans $\widetilde{V}'_2$, on montre aisément que

(2.59) $\qquad \widetilde{B}$ est inversible et $\widetilde{B}^{-1}$ est borné .

Les égalités

(2.60) $$\forall\, t \geq 0 \;,\; (\widetilde{B} + i\, t\, I) = i(-\, i\, \widetilde{B} + t\, I) = -\, i(i\, \widetilde{B} - t\, I)$$

avec (2.59) et (2.58) permettent de conclure que :

(2.61) $\qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\;\; (\widetilde{B} + i\, t\, I)$ est inversible et si $t > 0\;\; ||(\widetilde{B} + i\, t\, I)^{-1}|| \leq$

$$\leq \frac{1}{|t|} \;.$$

La proposition suivante (cf. HARAUX [9]) achève la démonstration de la proposition 2.1 et, par conséquence, du théorème 2.1.

Proposition 2.3. (HARAUX) : En supposant $\zeta \in L^2(0,T;\widetilde{H}_m)$, et l'opérateur $\widetilde{B}$ vérifiant (2.61) alors le problème (2.55) admet une et une seule solution forte telle que

(2.62) $$\widetilde{\theta} \in W^{1,2}(0,T;\widetilde{H}_m)\ ^{(*)}$$ □

Remarque 2.3. La solution $\widetilde{\theta}$ fournie par la proposition 2.3 vérifie (2.25) parce que $\widetilde{\theta}(t) \in D(\widetilde{B})$ p.p. $t \in\,]0,T[$ donc

$$\widetilde{K}\widetilde{\theta} = \widetilde{B}\widetilde{\theta} = \zeta - \widetilde{\theta}' \in L^2(0,T;\widetilde{H}_m) \to L^2(0,T;V'_2)$$

et la continuité de K^{-1} permet d'avoir $\widetilde{\theta} \in L^2(0,T;\widetilde{V}_1)$. □

(*) $W^{1,2}(0,T;\widetilde{H}_m) = \{\phi \in L^2(0,T;\widetilde{H}_m) \mid \frac{d\phi}{dt} \in L^2(0,T;\widetilde{H}_m)\}$ avec

$$|||\phi||| = [\,||\phi||^2_{L^2(0,T;\widetilde{H}_m)} + ||\frac{d\phi}{dt}||^2_{L^2(0,T;\widetilde{H}_m)}\,]^{1/2} \;.$$

2.3. Le cas $\Gamma_0 = \emptyset$, Γ_1 contenu dans un plan

La coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ intervient de façon fondame tale dans la démonstration du théorème 2.1. Si $\Gamma_0 = \emptyset$, on a $V_1 = [H^1(\Omega)]^3$ et d'après DUVAUT-LIONS [7], page 133, la propriété (1.34) reste vraie si Γ_1 n'est pas plan. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver $v \in [H^1(\Omega)]^3$, $v \neq 0$, tel que $a(v,v) = 0$, de sorte que (1.34) n'a pas lieu.

On introduit le sous-espace fermé de $[H^1(\Omega)]^3$:

(2.63) $$S = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v(x) = a + b\wedge x \ , \ v_N = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \ , \ a,b \in \mathbb{R}^3\}$$

et l'espace quotient :

(2.64) $$\dot{V}_1 = V_1/S = [H^1(\Omega)]^3/S$$

avec

(2.65) $$\dot{u} = \{u + \xi : \xi \in S\} \ , \ ||\dot{u}||_1 = \inf_{\xi\in S} ||u+\xi||_1 \ , \ u \in [H^1(\Omega)]^3 \ .$$

Alors on a

(2.66) $$a(v,v) = 0 \ \text{ si et seulement si } \ v \in S$$

de sorte qu'on peut définir la forme bilinéaire continue sur $\dot{V}_1$

(2.67) $$\dot{a}(\dot{v},\dot{v}) = a(v,v) \quad , \ u \in \dot{u} \ , \ v \in \dot{v} \ , \ \dot{u},\dot{v} \in \dot{V}_1$$

et on montre (cf. VIAÑO [15]) que, Ω étant borné de frontière régulière,

(2.68) $$\dot{a}(\dot{v},\dot{v}) \geq \alpha||\dot{v}||_1^2 \qquad \forall\, \dot{v} \in \dot{V}_1 \quad (\alpha > 0) \ .$$

Dans le cas présent, puisque $\Gamma_0 = \emptyset$, le problème (1.39) devient :

(2.69)
$$\left|\begin{array}{l} u : t \in [0,T] \to u(t) \in [H^1(\Omega)]^3 \\ \theta : t \in [0,T] \to \theta(t) \in H^1(\Omega) \quad , \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \ , \ 0 \le t \le T \\ \text{vérifiant dans} \quad]0,T[\\ a(u(t),v) - m(\theta(t),v) = \int_\Omega f(t).v \, dx + \int_{\Gamma_2} F(t).v \, d\Gamma \quad , \ \forall \ v \in [H^1(\Omega)]^3 \\ (\theta'(t),\phi)_2 + k(\theta(t),\phi) + m(\phi,u'(t)) = \int_\Omega q(t) \, dx - \int_{\Gamma_2} g(t)\phi \, d\Gamma \ , \\ \qquad \forall \ \phi \in V_2 \end{array}\right.$$

Lorsque $v \in S$, on a

(2.70) $$a(u,v) - m(\phi,v) = 0 \quad , \ \forall \ u \in [H^1(\Omega)]^3 \quad , \ \forall \ \phi \in H_2$$

de sorte que (2.69) n'est plus possible que si :

(2.71) $$\forall \ v \in S : \int_\Omega f(t)v \, dx + \int_{\Gamma_2} F(t)v \, d\Gamma = 0$$ (1)

En supposant (2.59), on peut définir la forme linéaire continue sur $\dot{V}_1$:

(2.72) $$<\dot{L}_1(t),\dot{v}> = \int_\Omega f(t).v \, dx + \int_{\Gamma_2} F(t).v \, d\Gamma \quad , \quad v \in \dot{v} \ , \ \dot{v} \in \dot{V}_1$$

et la forme bilinéaire continue sur $H_2 \times \dot{V}_1$:

(2.73) $$\dot{m}(\phi,\dot{v}) = m(\phi,v) \quad , \quad v \in \dot{v} \quad , \quad \dot{v} \in \dot{V}_1$$

et finalement résoudre le problème suivant ($\dot{a}$ est déjà $\dot{V}_1$-elliptique) :

---

(1) Voir DUVAUT-LIONS [7] pour une interprétation mécanique.

$$(2.74)\quad \left|\begin{array}{l} \dot{a}(\dot{u}(t),v) - \dot{m}(\theta(t),\dot{v}) = \langle \dot{L}_1(t),\dot{v}\rangle \quad , \forall\, \dot{v} \in \dot{V}_1 \\ \\ (\theta'(t),\phi)_2 + k(\theta(t),\phi) + \dot{m}(\phi,\dot{u}'(t)) = \int_\Omega q(t).\phi\, dx - \int_{\Gamma_2} g(t)\phi d\Gamma \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, \phi \in V_2 \\ \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(T) \quad , \quad \theta(0) = \theta(T) \end{array}\right.$$

L'unicité de $(\dot{u},\theta)$ signifie que la solution est définie à un déplacement rigide ξ, $\xi_N = 0$, quelconque près. □

3. SERIE DE FOURIER ASSOCIEE A LA SOLUTION

3.1. La série complexe

Pour ζ donné par (2.50)-(2.51), on note :

$$(3.1)\qquad \hat{\zeta}_n = \frac{1}{T} \int_0^T \zeta(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \omega = \frac{2\Pi}{T} .$$

Alors, on a (cf. HARAUX [9]) :

Proposition 3.1. (HARAUX) Dans les hypothèses de la proposition 2.3,la solution $\tilde{\theta}$ de (2.55) est la limite forte dans $W^{1,2}(0,T;\tilde{H}_m)$ de la suite $\{\tilde{\theta}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(3.2)\qquad \tilde{\theta}_N(t) = \sum_{|n|\le N} \hat{\theta}_n\, e^{in\omega t} \quad , \quad N \in \mathbb{N}$$

$$(3.3)\qquad \hat{\theta}_n = (\tilde{B} + in\omega I)^{-1}(\hat{\zeta}_n) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

□

Remarque 3.1.

a) Notons que la convergence dans $W^{1,2}(0,T;\tilde{H}_m)$ implique la convergence dans $C^o([0,T];\tilde{H}_m)$.

b) Il est intéressant de noter que $\tilde{\theta}_N$ est solution de

$$(3.4)\qquad \frac{d\tilde{\theta}_N}{dt} + \tilde{B}\,\tilde{\theta}_N = \zeta_N \ , \ \tilde{\theta}_N(0) = \tilde{\theta}_N(T)$$

avec

(3.5) $$\zeta_N(t) = \sum_{|n|\leq N} \hat{\zeta}_N \, e^{in\omega t} \quad , \quad N \in \mathbb{N} \, ,$$

suite qui converge vers ζ dans $L^2(0,T;\tilde{H}_m)$. □

Pour ξ_1 vérifiant (2.41), soient

(3.6) $$\hat{\xi}_{1n} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi_1(t) \, e^{-in\omega t} \, dt \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \hat{\xi}_{1n} \in V_1' \, .$$

(3.7) $$\xi_{1N}(t) = \sum_{|n|\leq N} \hat{\xi}_{1n} \, e^{in\omega t} \quad , \quad N \in \mathbb{N}$$

Alors

(3.8) $$\lim_{N\to+\infty} \xi_{1N} = \xi_1 \quad , \text{ dans } \; L^2(0,T;\tilde{V}_1')$$

de sorte que, en vertu de la continuité de $\tilde{A}^{-1}$ et $\tilde{M}$, on déduit que la suite

(3.9) $$\tilde{u}_N(t) = \sum_{|n|\leq N} \hat{u}_n \, e^{in\omega t} \quad , \quad N \in \mathbb{N}$$

avec

(3.10) $$\hat{u}_n = \tilde{A}^{-1}[\hat{\xi}_{1n} + \tilde{M} \, \hat{\theta}_n] \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

converge dans $L^2(0,T;\tilde{V}_1)$ vers $\tilde{u}$ donné par (2.43).

D'ailleurs, si on dérive dans (3.7), on a :

(3.11) $$\xi_{1N}'(t) = \sum_{|n|\leq N} in\omega \, \hat{\xi}_{1n} \, e^{in\omega t} \quad , \quad N \in \mathbb{N} \, .$$

Puisque $\xi_1' \in L^2(0,T;V_1')$ et $\frac{1}{T} \int_0^T \xi_1'(t) \, e^{-in\omega t} \, dt = in\omega \, \hat{\xi}_{1n}$ on déduit que

(3.12) $$\lim_{N\to+\infty} \xi_{1N}' = \xi_1' \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;\tilde{V}_1')$$

et d'après (3.8), on a :

(3.13) $\lim_{N\to+\infty} \xi_{1N} = \xi_1$, dans $C([0,T];\tilde{V}_1')$.

De la convergence de $\tilde{\theta}_N'$ à $\tilde{\theta}'$ dans $L^2(0,T;\tilde{H}_2)$ et de (3.12), on a que la suite

(3.14) $\tilde{u}_N' = \tilde{A}^{-1}[\xi_{1N}' + \tilde{M}\,\tilde{\theta}_N']$, $N \in \mathbb{N}$

converge dans $L^2(0,T;\tilde{V}_1)$ vers $\tilde{u}'$.

On vient de démontrer, donc, la proposition suivante :

<u>Proposition 3.2</u>. La solution $(\tilde{u},\tilde{\theta})$ de (2.40) vérifiant (2.24)-(2.25) s'obtient comme la limite forte dans $W^{1,2}(0,T;\tilde{V}_1) \times W^{1,2}(0,T;\tilde{H}_2)$ de la suite

(3.15) $\tilde{u}_N(t) = \sum_{|n|\le N} \hat{u}_n\, e^{in\omega t}$, $\tilde{\theta}_N(t) = \sum_{|n|\le N} \hat{\theta}_n\, e^{in\omega t}$, $N \in \mathbb{N}$,

avec $\hat{u}_n$, $\hat{\theta}_n$, $n \in Z$, donnés par

(3.16) $\hat{\theta}_n = (\tilde{B} + in\omega I)^{-1}\,(\hat{\zeta}_n)$.

(3.17) $\hat{u}_n = \tilde{A}^{-1}[\hat{\xi}_{1n} + \tilde{M}\,\hat{\theta}_n]$. □

Soient $\hat{\xi}_{2n} \in \tilde{H}_2$ donnés par

(3.18) $\hat{\xi}_{2n} = \frac{1}{T}\int_0^T \xi_2(t)\, e^{-in\omega t}\,dt$, $n \in \mathbb{Z}$

où l'intégrale est considérée avec $(\ ,\ )_2$ dans $L^2(\Omega)$.

On pose

(3.19) $\xi_{2N}(t) = \sum_{|n|\le N} \hat{\xi}_{2n}\, e^{in\omega t}$, $N \in \mathbb{N}$.

La suite $\{\xi_{2N}\}$ converge vers ξ_2 dans $L^2(0,T;\widetilde{H}_2)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

D'autre part, d'après (2.50) et l'expression (3.1) de $\hat{\zeta}_n$ on a

$$(3.20) \qquad (\hat{\zeta}_n,\phi)_n = (\hat{\xi}_n,\phi)_2 \quad , \quad \forall\ \phi \in \widetilde{H}_2$$

où

$$(3.21) \qquad \hat{\xi}_n = \frac{1}{T_0}\int^T \xi(t)\ e^{-in\omega t}\ dt \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

où l'intégrale est considérée avec $(.,)_2$ dans $L^2(\Omega)$.

D'après (2.47), on a

$$(3.22) \qquad \hat{\xi}_n = \hat{\xi}_{2n} - \widetilde{M}^* \widetilde{A}^{-1}\ (in\omega\ \hat{\xi}_{1n}) \quad , \quad n \in \mathbb{Z}\ .$$

D'ailleurs, l'expression (3.16) équivaut à

$$(3.23) \qquad (\widetilde{B}\ \hat{\theta}_n,\phi)_m + in\omega(\hat{\theta}_n,\phi)_m = (\hat{\zeta}_n,\phi)_m \quad , \quad \forall\ \phi \in \widetilde{V}_2$$

et encore (d'après (3.21)-(3.22)) :

$$(3.24) \qquad \left| \begin{array}{l} \widetilde{k}(\hat{\theta}_n,\phi) + in\omega(\hat{\theta}_n + \widetilde{M}^*\widetilde{A}^{-1}\ \widetilde{M}\ \hat{\theta}_n,\phi)_2 = \\ \qquad = (\hat{\xi}_{2n},\phi)_2 - in\omega(\widetilde{M}^*\widetilde{A}^{-1}\ \hat{\xi}_{1n},\phi)_2 \quad , \quad \forall\ \phi \in \widetilde{V}_2\ . \end{array} \right.$$

L'égalité (3.17) s'écrit de la façon équivalente

$$(3.25) \qquad \widetilde{A}\hat{u}_n = \hat{\xi}_{1n} + \widetilde{M}\ \hat{\theta}_n\ ,$$

soit encore

$$(3.26) \qquad \widetilde{a}(u_n,v) - \widetilde{m}(\hat{\theta}_n,v) = \langle\hat{\xi}_{1n},v\rangle \quad , \quad \forall\ v \in \widetilde{V}_1\ .$$

Corollaire 3.1. Dans les hypothèses (2.41)-(2.42), la solution du problème (2.26) vérifiant (2.24)-(2.25) est obtenue comme la limite dans $W^{1,2}(0,T;\widetilde{V}_1) \times W^{1,2}(0,T;\widetilde{H}_2)$ de la série de Fourier

$$(3.27) \qquad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_n e^{in\omega t} , \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}_n e^{in\omega t} \right)$$

dont les coefficients sont, pour $n \in \mathbb{Z}$, solutions du problème variationnel suivant :

$$(3.28) \qquad \left| \begin{array}{l} \hat{u}_n \in \widetilde{V}_1 \quad , \quad \hat{\theta}_n \in \widetilde{V}_2 \\ \widetilde{a}(\hat{u}_n,v) - \widetilde{m}(\hat{\theta}_n,v) = \langle\hat{\xi}_{1n},v\rangle \quad , \quad \forall\, v \in \widetilde{V}_1 \\ in\omega(\hat{\theta}_n,\phi)_2 + \widetilde{k}(\hat{\theta}_n,\phi) + in\omega\, \overline{\widetilde{m}(\phi,\hat{u}_n)} = (\hat{\xi}_{2n},\phi)_2 \quad , \quad \forall\, \phi \in \widetilde{V}_2 . \end{array} \right.$$

Remarque 3.2.

a) Si ξ_1,ξ_2 sont donnés par (2.28)-(2.29), alors la solution $(\widetilde{u},\widetilde{\theta})$ obtenue est la solution réelle du problème (2.16).

b) La série de Fourier associée à la solution (u,θ) du problème (1.39) est la somme des séries correspondant à $(\widetilde{u},\widetilde{\theta})$ et (Φ,Λ) utilisées pour la transformation (2.15). □

3.2. La série réelle

On se place maintenant dans le cas de la remarque 3.2.a). La solution donnée par

$$(3.29) \qquad \widetilde{u}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_n e^{in\omega t} \quad , \quad \widetilde{\theta}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}_n e^{in\omega t}$$

est réelle.

On pose

$$(3.30) \qquad \hat{u}_n = \hat{u}_n^1 + i\, \hat{u}_n^2 \;,\; \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n^1 + i\, \hat{\theta}_n^2 \;,\; \hat{u}_n^j \in V_1 \;,\; \hat{\theta}_n^j \in V_2 \quad (j = 1,2)$$

Les termes à gauche de (3.29) étant réels, on déduit :

(3.31) $$\tilde{u}(t) = \hat{u}_0 + \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} [\hat{u}_{1n} \cos n\omega t + \hat{u}_{2n} \sin n\omega t]$$

(3.32) $$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}_0 + \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} [\hat{\theta}_{1n} \cos n\omega t + \hat{\theta}_{2n} \sin n\omega t]$$

où

(3.33) $$\hat{u}_0 = \hat{u}_0^1 \quad , \quad \hat{\theta}_0 = \hat{\theta}_0^1$$

(3.34) $$\hat{u}_{1n} = 2[\hat{u}_n^1 + \hat{u}_{-n}^1] \quad , \quad \hat{u}_{2n} = 2[\hat{u}_{-n}^2 - \hat{u}_n^2] \quad , \quad n \geq 1 \; .$$

(3.35) $$\hat{\theta}_{1n} = 2[\hat{\theta}_n^1 + \hat{\theta}_{-n}^1] \quad , \quad \hat{\theta}_{2n} = 2[\hat{\theta}_{-n}^2 - \hat{\theta}_n^2] \quad , \quad n \geq 1 \; .$$

Posons pour $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{L}_{jn}^k \in V_j'$ $(j,k=1,2)$ les éléments définis par

(3.36) $$\hat{L}_{jn}^1 = \frac{1}{T} \int_0^T L_j(t) \cos n\omega t \, dt \; , \; \hat{L}_{jn}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T L_j(t) \sin n\omega t \, dt \quad (j=1,2)$$

On vérifie aisément que dans le cas où ξ_1,ξ_2 sont donnés par (2.28)-(2.29), on a pour $v = v_1 + iv_2 \in \tilde{V}_1$, $\phi = \phi_1 + i\,\phi_2 \in \tilde{V}_2$:

(3.37) $$\langle\hat{\xi}_{1n},v\rangle = \langle\hat{L}_{1n}^1,v_1\rangle - \langle\hat{L}_{1n}^2,v_2\rangle - i\langle\hat{L}_{1n}^2,v_1\rangle - i\langle\hat{L}_{1n}^1,v_2\rangle$$

(3.38) $$\langle\hat{\xi}_{2n},\phi\rangle = \langle\hat{L}_{2n}^1,\phi_1\rangle - \langle\hat{L}_{2n}^2,\phi_2\rangle - i\langle\hat{L}_{2n}^2,\phi_1\rangle - i\langle\hat{L}_{2n}^1,\phi_2\rangle \; .$$

Alors, le problème (3.28) équivaut, dans ce cas, à :

(3.39) $$\left| \begin{array}{l} \hat{u}_n \in \tilde{V}_1 \quad , \quad \hat{\theta}_n \in \tilde{V}_2 \\[2mm] \tilde{a}(\hat{u}_n,v) - \tilde{m}(\hat{\theta}_n,v) = \langle\hat{L}_{1n}^1,v\rangle - i\langle\hat{L}_{1n}^2,v\rangle \quad , \quad \forall\, v \in V_1 \\[2mm] in\omega(\hat{\theta}_n,\phi)_2 + \tilde{k}(\hat{\theta}_n,\phi) + in\omega\, \overline{\tilde{m}(\phi,\hat{u}_n)} = \langle\hat{L}_{2n}^1,\phi\rangle - i\langle\hat{L}_{2n}^2,\phi\rangle \quad , \quad \forall\, \phi \in V_2 \end{array} \right.$$

Si on tient compte de l'expression (3.30), alors (3.39) s'écrit aussi sous la forme

$$(3.40)\quad \left|\begin{array}{l} \hat{u}_n^1 \,,\ \hat{u}_n^2 \in V_1 \quad , \quad \hat{\theta}_n^1 \,,\ \hat{\theta}_n^2 \in V_2 \\ a(\hat{u}_n^1,v) - m(\hat{\theta}_n^1,v) = <\hat{L}_{1n}^1,v> \\ a(\hat{u}_n^2,v) - m(\hat{\theta}_n^2,v) = -<\hat{L}_{1n}^2,v> \quad \forall\, v \in V_1 \\ -n\omega(\hat{\theta}_n^2,\phi)_2 + k(\hat{\theta}_n^1,\phi) - n\omega\, m(\phi,\hat{u}_n^2) = <\hat{L}_{2n}^1,\phi> \\ n\omega\, (\hat{\theta}_n^1,\phi)_2 + k(\hat{\theta}_n^2,\phi) + n\omega\, m(\phi,\hat{u}_n^1) = -<\hat{L}_{2n}^2,\phi> \quad \forall\, \phi \in V_2\ . \end{array}\right.$$

Pour $n = 0$, $\hat{L}_{10}^2$, $\hat{L}_{20}^2$ étant nulles, avec la solution (3.33), on obtien

$$(3.41)\quad \left|\begin{array}{l} a(\hat{u}_0,v) - m(\hat{\theta}_0,v) = <\hat{L}_{10}^1,v> \quad \forall\, v \in V_1 \\ k(\hat{\theta}_0,\phi) = <\hat{L}_{20}^1,\phi> \quad \forall\, \phi \in V_2\ . \end{array}\right.$$

Soit $n \geq 1$, alors, d'après les inégalités

$$(3.42)\quad \hat{L}_{jn}^1 = \hat{L}_{j,-n}^1 \quad , \quad \hat{L}_{jn}^2 = -\hat{L}_{j,-n}^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad (j=1,2)$$

le système (3.40) pour $-n$ devient

$$(3.43)\quad \left|\begin{array}{l} \hat{u}_{-n}^1 \,,\ \hat{u}_{-n}^2 \in V_1 \quad , \quad \hat{\theta}_{-n}^1 \quad , \quad \hat{\theta}_{-n}^2 \in V_2 \\ a(\hat{u}_{-n}^1,v) - m(\hat{\theta}_{-n}^1,v) = <\hat{L}_{1n}^1,v> \\ a(u_{-n}^2,v) - m(\hat{\theta}_{-n}^2,v) = <\hat{L}_{2n}^2,v> \quad \forall\, v \in V_1 \\ n\omega(\hat{\theta}_{-n}^2,\phi)_2 + k(\hat{\theta}_{-n}^1,\phi) + n\omega\, m(\phi,\hat{u}_{-n}^2) = <\hat{L}_{2n}^1,\phi> \quad \forall\, \phi \in V_2 \\ -n\omega(\hat{\theta}_{-n}^1,\phi)_2 + k(\hat{\theta}_{-n}^2,\phi) - n\omega\, m(\phi,\hat{u}_{-n}^1) = <\hat{L}_{2n}^2,\phi> \quad \forall\, \phi \in V_2\ . \end{array}\right.$$

Par addition de (3.40) et (3.43), on déduit que $\hat{u}_{jn}$, $\hat{\theta}_{jn}$, $n \geq 1$ - coéfficients de la série (3.31)-(3.32) - sont solution de :

(3.44)
$$\left| \begin{array}{l} \hat{u}_{jn} \in V_1 \quad , \quad \hat{\theta}_{jn} \in V_2 \qquad (j=1,2) \\ a(\hat{u}_{1n},v) - m(\hat{\theta}_{1n},v) = <\hat{L}^1_{1n},v> \\ a(\hat{u}_{2n},v) - m(\hat{\theta}_{2n},v) = <\hat{L}^2_{1n},v> \quad \forall\, v \in V_1 \\ n\omega(\hat{\theta}_{2n},\phi)_2 + k(\hat{\theta}_{1n},\phi) + n\omega\, m(\phi,\hat{u}_{2n}) = <\hat{L}^1_{2n},\phi> \quad \forall\, \phi \in V_2 \ . \\ -n\omega(\hat{\theta}_{1n},\phi)_2 + k(\hat{\theta}_{2n},\phi) - n\omega\, m(\phi,\hat{u}_{1n}) = <\hat{L}^2_{2n},\phi> \quad \forall\, \phi \in V_2 \ . \end{array} \right.$$ □

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS, R.A. : "Sobolev spaces". Academic Press. New York. 1975

[2] AURIAULT,J.L. - SANCHEZ-PALENCIA, E. : Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable". Journal de Mécanique. Vol. 16, n°4. 1977.

[3] BREZIS, H. : "Opérateurs maximaux monotones et semigroupes des contractions dans des espaces de Hilbert". North-Holland. Amsterdam. 1973.

[4] CARLSON, D.E. : "Linear thermoelasticity". Enciclopedia of physics. Vol VI/a2 . Springer Verlag. 1972.

[5] CIARLET, P.G. : "The finite element method for elliptic problems". North-Holland. 1978.

[6] DAFERMOS, C.M. : "On the existence and asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity". Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 29. 1967.

[7] DUVAUT, G. - LIONS, J.L. : "Les inéquations en mécanique et en physique". Dunod. Paris. 1972.

[8] DUVAUT, G. - LIONS, J.L. : "Inéquations en thermoélasticité et magnéto-hydrodynamique". Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 46, n° 4. 1972.

[9] HARAUX, A. : "Semigroupes linéaires et équations d'évolution linéaire périodique". Univ. Paris VI, L.A.N. 1978.

[10] LANDAU, L. - LIFSHITZ, E. : "Théorie d'élasticité". Miv. Moscou. 1967.

[11] LIONS, J.L. : "Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites". Springer Verlag. Collection Jaune, T. III. 1961.

[12] LIONS, J.L. : Control optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles". Dunod. Paris. 1968.

[13] LIONS, J.L. - MAGENES, E. : "Problèmes aux limites non homogènes et applications". Vol. 1,2. Dunod. Paris. 1968.

[14] MANDEL, G. : "Cours de mécanique des milieux continus". Tome 2. Mécanique des solides. Gathier-Villars. 1966.

[15] VIAÑO-REY, J.M. : "Un problème de thermoélasticité dans un milieu avec attaches élastiques". Rapport I.N.R.I.A. Laboria. A paraître.

[16] YOSIDA, K. : "Functional analysis". Grundlehren B. 123. Springer Verlag. 1965.

Imprimé en France

par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique